L’activité de contrôle en mathématiques : le cas de suites récurrentes

Exemples d’expérimentations en fin de lycée

Résumé : Ce travail rend compte de deux expérimentations visant à étudier l’activité de contrôle en mathématiques chez les élèves, dans le domaine de l’analyse. Nous nous centrons sur la résolution de tâches qui ont pour but d’étudier la convergence des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ en fin de lycée. Nous comparons les résultats obtenus lors de la résolution d’une tâche avec l’utilisation de la calculatrice dans deux contextes différents : la première s’intéresse à la résolution sans l’intervention de l’enseignant et la seconde avec son intervention. Nos analyses montrent que les aides de l’enseignant ont une incidence sur les activités mathématiques de contrôle dans les productions des élèves, provoquant une nette différence par rapport au contrôle qui développent les élèves en autonomie.

Mots-clé : Contrôle sémiotique, contrôle instrumental, contrôle discursif, suites récurrentes, paradigmes de l’analyse.

Introduction et contexte de la recherche

L’activité de contrôle est importante en mathématiques car elle permet une cohérence dans la résolution d’une tâche. Cette activité a été étudiée dans différents domaines des mathématiques (Saboya et al., 2015 ; Bikner-Ahsbahs et al., 2015) y compris en analyse (Gaudin, 2005 ; Arzarello et Sabena, 2011 ; Chorlay, 2019). Nous nous intéressons plus particulièrement à ce dernier domaine, qui trouve son importance dans des notions étudiées au cours de la transition lycée-université (L-U).

L’activité de contrôle est particulièrement faible au début de l’université, ce qui nous conduit à l’identifier comme une des problématiques clés de la transition L-U (Flores González, 2021). Dans ce contexte, un des aspects importants est l’utilisation des outils numériques dans la résolution de tâches dans la classe de mathématiques comme facilitateurs du développement de cette activité de contrôle. La calculatrice est un artefact emblématique au lycée -en France- qui peut être utilisé en complément d’autres logiciels utiles pour la visualisation dans le domaine de l’analyse, constituant ainsi une aide à la stimulation du contrôle. Mais l’utilisation de ces outils dans la classe peut changer selon le discours de l’enseignant pendant le déroulement des séances. Nous nous demandons ainsi : Quel est l’impact des interventions de l’enseignant lors de l’utilisation des outils numériques sur le développement de l’activité de contrôle mathématique dans l’étude de suites récurrentes à la fin du lycée ?

Cadre théorique

Nous étudions l’activité de contrôle et le rôle de l’enseignant dans les productions des élèves grâce à un *Networking* de théories (Prediger et Bikner-Ahsbahs, 2014) entre la théorie de l’activité en didactique des mathématiques (TADM) (Vandebrouck, 2018) et les espaces de travail mathématique (ETM) (Kuzniak et al. 2016). Dans le cadre de la TADM, l’activité de contrôle est développée lors de la réalisation de tâches complexes[1], lorsque les élèves sont capables de reconnaître que leur raisonnement est cohérent avec plusieurs points de contrôle. Cela est aussi en relation avec le

[1] Les tâches complexes sont celles qui nécessitent plusieurs adaptations de connaissances, l’utilisation variée de TICE, ou une diversité des méthodes éventuellement à choisir (Robert et Vandebrouck, 2014).

déroulement de l'action en accord avec les connaissances à mettre en fonctionnement, ainsi qu'à une production qui correspond bien au but visé (Rogalski, 2015). En ce qui concerne les ETM, nous utilisons les trois dimensions *sémiotique*, *instrumentale* et *discursive*, essentielles dans le développement du travail mathématique. Plus spécifiquement dans le domaine de l'analyse, nous utilisons deux *paradigmes* présents à la fin du lycée (Montoya Delgadillo et Vivier, 2016) : l'analyse geométrico-arthiméthique [A1] et l'analyse calculatoire [A2]. En effet, une dialectique entre [A1] et [A2] permet de contrôler le travail effectué pour éviter des erreurs.

L'articulation de ces deux théories nous permet de proposer trois types de contrôle à promouvoir (Flores González, Vandebrouck et Vivier, 2022) :

Contrôle sémiotique : Cohérence établie dans l'utilisation de différentes représentations sémiotiques de l'objet. Ici, la représentation graphique d'une suite croissante doit être cohérente avec la représentation d'un tableau de valeurs numériques de cette suite.

Contrôle discursif : Utilisation des définitions mathématiques, méthodes de preuve ou théorèmes qui permettent d'établir une cohérence dans l'étude de l'objet mathématique en question. Dans le cas des suites récurrentes, la possibilité dans l'utilisation du théorème de la limite monotone peut permettre de contrôler la convergence de la suite.

Contrôle instrumental : Utilisation d'outils ou de logiciels pour vérifier le travail produit. Dans le cas de suites, l'utilisation d'un algorithme ou de termes de la suite peut se faire, par exemple, grâce à l'utilisation de la calculatrice. Le contrôle instrumental peut impliquer la mise en fonctionnement des contrôles sémiotiques et discursifs.

Les expérimentations

Nous avons conçu une tâche avec l'objectif d'offrir des occasions de contrôle sémiotique et instrumental aux élèves par l'utilisation de la calculatrice. Ces occasions au sein du paradigme arithmético-géométrique [A1] (notamment le calcul de termes de la suite et éventuellement la représentation graphique de ces termes pour visualiser les propriétés de la suite) devaient soutenir le travail discursif dans le paradigme d'analyse calculatoire [A2] (preuve des propriétés de la suite conjecturées dans le paradigme [A1]), pour favoriser ainsi une dialectique entre les paradigmes [A1] et [A2] dans l'étude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$. Ces tâches ont été expérimentées au sein de deux classes de niveau Terminale Scientifique de deux lycées, avec l'utilisation individuelle de calculatrices[2], dans deux contextes distincts : Dans la première classe, 30 élèves travaillaient en autonomie sans l'aide de l'enseignant[3]. Dans la deuxième classe, 32 élèves travaillaient de façon individuelle ou en binôme, et l'enseignant accompagnait la résolution de la tâche par les élèves avec des aides ponctuelles. De plus, dans cette deuxième classe, l'enseignant mettait en place un bilan pour la résolution de chaque question posée, après d'avoir donné quelques minutes pour le travail des élèves.

Résultats et discussion

Concernant les élèves qui travaillaient en autonomie, 9 élèves sur 30 font une confusion entre $f(u_n)$ et $f(n)$, produisant un travail incorrect dans le paradigme [A1]. 15 élèves sur 30 entrent dans le

[2] Casio graph et TI 83.
[3] Ces aides font référence au discours de l'enseignant qui peut impliquer des médiations en forme d'aide aux élèves. Ce type de discours rend plus explicite la mise en fonctionnement des connaissances nécessaires pour résoudre la tâche et constitue une aide au développement de certaines sous-activités mathématiques.

paradigme [A1] avec un travail correct et font partiellement des bonnes conjectures des propriétés de la suite. Parmi ces 15 élèves, 5 ne répondent pas à la question qui marque le changement de paradigme vers [A2] (prouver que la suite est bornée), 6 élèves restent encore dans le paradigme [A1] (ou dans un travail intermédiaire), et seulement 4 élèves produisent un travail dans [A2]. D'ailleurs, parmi ces 4 derniers élèves, un seul fait preuve du développement de l'activité de contrôle (instrumental) en utilisant la calculatrice pendant toute la résolution de la tâche. Cet élève essaye de calculer les termes de la suite, mais il est confronté à un affichage systématique d'erreur sur sa calculatrice (sans doute dû aux valeurs numériques que peut prendre n, car ils sont affichés comme décimaux). Face à cela, il constate une incohérence, raison pour laquelle il reprend ses calculs sur la calculatrice, l'amenant à développer un contrôle instrumental : dans sa production finale nous trouvons les valeurs attendues de la suite. Enfin, cet élève produit un discours attendu dans la preuve des conjectures des propriétés de la suite dans le paradigme [A2]. Son travail final montre une bonne dialectique entre [A1] et [A2] pour étudier la suite $u_{n+1} = f(u_n)$.

De cette façon, on constate que la plupart des élèves ne comprennent pas qu'il s'agit d'un travail dialectique entre paradigmes. C'est-à-dire que, bien que la moitié d'élèves entrent dans le paradigme [A1] avec un travail correct, seulement un tiers d'entre eux fait le changement vers le paradigme [A2]. Dans cette classe, les occasions de contrôle sémiotique et instrumental (dans le paradigme [A1]) n'ont pas toujours servi au développement de contrôles discursifs (dans le paradigme [A2]). Cela montre que l'activité de contrôle à partir de la dialectique entre [A1] et [A2] concomitante à l'utilisation de la calculatrice est un travail difficile pour les élèves lorsqu'ils sont en autonomie.

Dans la classe qui bénéficie de l'aide de l'enseignant, une grande partie des élèves rentrent correctement dans le paradigme [A1] (24/32 élèves). Cela peut s'expliquer par une aide donnée par l'enseignant sur la définition de la suite récurrente qui permettait de la reconnaitre comme telle : « *La suite $u_{n+1} = f(u_n)$ ça veut dire que u_{n+1} est égale à 1 sur 2 moins u_n, avec un terme initial quelque chose...* ». Cette aide réduit la confusion entre $f(u_n)$ et $f(n)$ à un seul élève. Cette dernière l'a vraisemblablement aidé à rentrer la bonne suite dans les calculatrices. De plus, c'est l'enseignant qui apporte des aides sur les contrôles sémiotique et instrumental dans le paradigme [A1]. Par exemple, dans le travail au sein du paradigme [A1], suite à une question d'un binôme d'élèves, l'enseignant programme leur calculatrice, puis s'adresse à toute la classe en disant : *« Si vous faites une recherche graphique, pensez à régler la fenêtre ».* Cette aide à propos d'un contrôle instrumental avec la calculatrice a sans doute servi à des élèves de visualiser les propriétés de la suite et avancer vers un travail mathématique correct. Par ailleurs, une majorité d'élèves semble maîtriser la dialectique [A1] et [A2] dans les productions analysées, car sur les 24 élèves qui font les bonnes reconnaissances des propriétés de la suite dans [A1], 23 élèves répondent dans le paradigme [A2] attendu dans la question qui marquait le changement de paradigme (1 élève ne répond pas). Dans cette classe ce sont les interventions de l'enseignant qui déclenchent les changements de paradigme.

À travers l'analyse des données obtenues, nous montrons que même lorsque les occasions de contrôle mathématique sont proposées aux élèves à partir d'une dialectique entre paradigmes, le contrôle n'est pas toujours mobilisé et reste une activité difficile à atteindre. Il semblerait que l'élève dépend des interventions de l'enseignant pour produire un travail contrôlé et pour réussir la tâche.

En conclusion, on peut légitimement se demander ce qu'il convient de faire pour que les élèves développent une autonomie dans cette activité de contrôle afin qu'ils puissent s'en servir par la suite.

Bibliographie

Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 189–206. doi:10.1007/s10649-010-9280-3

Bikner-Ahsbahs, A., Sabena, C., Arzarello, F., & Krause, C. (2014). Semiotic and theoretic control within and across conceptual frames. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*, 2, 153–160.

Chorlay, R. (2019). A Pathway to a Student-Worded Definition of Limits at the Secondary-Tertiary Transition. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 5*, 267–314.

Flores González, M. (2021). *Activité et travail mathématique à la transition lycée-université en Analyse : le cas de suites* $u_{n+1} = f(u_n)$. Thèse de doctorat. Université de Paris.

Flores González, M., Vandebrouck, F. & Vivier, L. (2022). A classic recursive sequence calculus task at the secondary-tertiary level in France. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* doi:10.1080/0020739X.2021.2014583

Gaudin, N. (2005). *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de fonction* Thèse de Doctorat. Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in Schooling: An Introduction. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 721–737.

Montoya Delgadillo, E., & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM Mathematics Education, 48*(6), 739–754.

Prediger, S., & Bikner-Ahsbahs, A. (2014). Introduction to Networking: Networking Strategies and Their Background. In *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 117–125). Springer International Publishing.

Rogalski, J. (2015). *Didactique et cognition. De Vygotsky à Dehaene... ?* Cahiers du LDAR, nº13. IREM de Paris.

Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : Analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en didactique des mathématiques, 34*(2-3), 239–283.

Saboya, M., Bednarz, N., & Fernando, H. (2015). Le contrôle exercé en algèbre : Conceptualisation et analyses en résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 20*, 61–100.

Vandebrouck, F. (2018). Activity Theory in French Didactic Research. In *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (Kaisier G., Forgasz H., Graven M., Kuzniak A., Simmt E., Xu B., pp. 679–698). Springer.