

Développer une expression algébrique : quel(s) discours enseignant(s) ?

Résumé : Après avoir interrogé ce que les élèves de cycle 3 étaient capables de justifier lors de calculs multiplicatifs faisant appel à la distributivité, nous nous intéressons aux discours des enseignants du collège dans des tâches de développement d'expression numérique ou algébrique.

Mots-clé : distributivité, discours enseignant, collège

Introduction

Dans l'institution scolaire française, la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition est un savoir mathématique institutionnalisé au cycle 4, en lien avec le domaine du calcul littéral. Pourtant, des connaissances liées à cette propriété semblent mises en fonctionnement dès le cycle 2 dans le domaine du calcul numérique, à la fois en lien avec le calcul posé, le calcul mental et le calcul en ligne.

Dans Barthès-Garnier (2020), l'auteure a précisément cherché à questionner les usages de cette propriété au primaire. Cette recherche a permis de montrer que les élèves de CM2 mettent bel et bien en fonctionnement des connaissances relevant de la distributivité pour accomplir certaines tâches de calcul posé ou mental. Pour autant, les élèves ne semblent pas spontanément en mesure de formuler de manière aboutie les techniques de calcul sous-jacentes. En accord avec hypothèses formulées par Constantin (2017) sur la base d'une étude des programmes et des manuels de primaire, les élèves de cycle 3 ne produisent pas ou peu de discours ou quand ils en produisent, ceux-ci restent centrés sur des actions (« il faut soustraire 2 de 10 ») voire sur des manipulations de signes « donnant à voir » des actions liées à ces actions (par exemple « on rajoute un zéro en changeant de ligne [dans une opération posée] »). Ils demeurent notamment privés d'arguments liés à la structure d'expressions numériques, ce qui n'est pas sans lien avec la centration constatée par d'autres auteurs (Grugeon-Allys & Pilet, 2017) sur l'aspect procédural de telles expressions (Sfard, 1991), majoritairement mobilisé par les élèves.

Une fois la propriété de distributivité explicitée et enseignée au collège, quel(s) discours sont tenu(s) par les élèves et les enseignants sur ses usages dans le domaine du calcul numérique et littéral ?

Quels discours possibles (d'élèves et d'enseignants) au cycle 4 ?

Si l'on peut penser que l'institutionnalisation de la propriété de distributivité au cycle 4 peut répondre pour partie aux difficultés constatées dans les discours produits par des élèves de cycle 3, nous faisons l'hypothèse que la question n'est pas réglée pour autant. Il nous semble d'autant plus intéressant de nous intéresser aux discours d'élèves et d'enseignants de cycle 4 que la verbalisation d'écritures symboliques est loin d'aller de soi s'agissant du calcul littéral. De même, Chevallard identifie, lui aussi, cette dualité entre l'oral et l'écrit qu'il va qualifier de « trouble culturel » au niveau de l'algèbre :

« L'avènement historique de l'algèbre met en relief le « trouble » culturel dans la relation entre l'écrit et l'oral. Lorsque, de nos jours, on « lit » sur le papier l'expression $2x(x + 3)$, nous savons qu'il s'agit, en essence, d'une expression écrite, qu'il nous faut alors oraliser en disant : « deux x facteur de x plus trois ». Cette expression orale n'est que l'oralisation d'une expression qui reste fondamentalement écrite. » (Chevallard, 2020, p. 114)

Nous utiliserons de terme de « verbalisation » (Fluckiger, 2020) qui, de notre point de vue, recouvre des « oralisations » d'écritures symboliques (comme celle d'un produit qui peut être « oralisé » de différentes façons), mais aussi les caractéristiques de ces écritures, liées au caractère procédural et structural d'une expression (Sfard, 1991), et les opérations de réécritures d'expressions numériques et littérales (portées par des égalités de type « identité ») qualifiées de « transformations de mouvement » (Drouhard & Panizza, 2012) prenant appui sur la propriété de distributivité (ou d'autres propriétés des nombres et des opérations, telles la commutativité, l'associativité...). Ce sont donc autant d'objets de discours possibles que nous avons essayé d'envisager en amont même de l'étude de verbalisations effectives d'élèves et d'enseignants en lien avec les usages de la distributivité.

Un premier objet de discours possible qui nous est apparu rapidement est la verbalisation d'expressions symboliques relevant de produits. Puis, le deuxième objet de discours identifié sera la verbalisation du caractère procédural et du caractère structural d'une expression algébrique (Sfard, 1991) ; et enfin, nous chercherons à analyser la verbalisation des transformations de mouvements lors des réécritures des expressions algébriques (Drouhard et Panizza, 2012).

Étude de discours d'enseignants dans les usages de la propriété de distributivité dans des tâches de développement d'expressions algébriques : quelles verbalisations ?

Nous avons décidé dans un premier temps de nous intéresser aux verbalisations des enseignants dans des tâches de développement d'expressions algébriques.

Dans les manuels :

Les manuels sont les premiers observables à la fois de discours possibles d'enseignants et de ce qui pourrait contribuer à les orienter. Nous avons donc recherché de possibles verbalisations indiquées dans les manuels. Mis à part dans un seul manuel sur quatre sélectionnés, les verbalisations visant à accompagner le travail de calcul algébrique semblent absentes, partielles ou peu contextualisées (davantage associées à l'énoncé général qu'aux exemples donnés)¹. Ces premiers constats laissent à penser que la question des discours enseignants tenus à l'oral qui viseraient à étayer les usages de la propriété de distributivité dans le développement d'expressions numériques ou littérales, reste relativement ouverte.

Comment les enseignants « verbalisent-ils » quand ils cherchent à accompagner le travail des élèves dans l'accomplissement d'une tâche de calcul numérique ou algébrique donnée ?

Mise en place d'une enquête sur le discours des enseignants : quelles variétés dans les verbalisations associées à des tâches de calcul algébrique ?

De façon à aborder ces questions, nous avons conduit une enquête ayant pour but d'apporter un premier éclairage sur les usages langagiers des enseignants concernant l'usage de la propriété de

¹Pourtant, dans d'autres chapitres de ces mêmes manuels, on trouve parfois des indications sur la verbalisation d'expressions littérales comme : « a^2 » se lit « a au carré » ou « 10^n » se lit « 10 exposant n ».

distributivité dans des tâches relevant de développement d'expressions algébriques. Précisons qu'il s'agit d'un travail exploratoire (qui vise à appréhender une variété de discours tenus par des enseignants donnés) et non d'une étude ayant des objectifs d'exhaustivité (qui viserait à explorer tous les discours tenus possiblement par les enseignants de mathématiques).

Nous avons travaillé avec cinq enseignants de collège d'horizons très variés mais ayant en commun une certaine expérience (au minimum 10 ans d'ancienneté) du métier d'enseignant.

Ils ont accepté de corriger un exercice de développement de neuf expressions algébriques « comme s'ils étaient devant des élèves de fin de 4^e », tâche classique en fin de cycle 4. La consigne qui aurait été donnée aux élèves était « Développe les expressions suivantes ». Ils ont accepté d'être filmés, mais ils ignoraient que leurs pratiques langagières seraient au centre de notre attention.

Nous avons cherché à observer la façon dont ils verbalisent ces expressions algébriques, et le discours (au sens commun) qu'ils vont tenir lors des transformations d'écritures de ces expressions.

Nous nous sommes limités à l'usage de la distributivité dite simple pour développer des expressions algébriques du type $k \times (a + b)$.

En nous appuyant sur notre étude préalable conduite en termes d'objets de discours, nous avons retenu des variables didactiques qui pourraient avoir une influence sur les discours des enseignants :

- La présence du signe \times : formulation sous la forme $k \times (...)$ ou $k(...)$;
- La place « du facteur k » : développement d'une expression du type $k \times (...)$ ou $(...) \times k$;
- La nature « du facteur k ». Nous avons retenu trois situations : k peut être un nombre entier, un monôme de degré 1 avec signe \times apparent, un monôme de degré 1 sans signe apparent.

Ces variables didactiques sont directement en lien avec les objets de discours identifiés en amont.

Nos premiers résultats :

Nous avons analysé en détail les premières verbalisations du produit : les cinq enseignants verbalisent les expressions algébriques de façons très différentes. Ces variations ont des causes mêlant congruence sémantique, place du facteur k , présence ou non du signe croix \times , et attachement au caractère structural de l'expression. En effet, les verbalisations sont « fluctuantes » et non pilotées (à part pour un enseignant) par l'aspect structural de l'expression, notamment s'agissant du produit formulé de manière variable (facteur de, fois, multiplié par) – même si on trouve une forme de cohérence plus grande dans le discours, par exemple chez un enseignant qui tente de revenir de manière plus systématique à l'addition réitérée.

Enfin, nous avons analysé ce que les enseignants donnent à voir pour amorcer une technique de développement et la façon dont ils font référence à la propriété de distributivité. Ces références à la propriété de distributivité dans les verbalisations des enseignants sont très diverses. Chaque enseignant semble avoir sa façon propre de mettre en mots l'usage de la propriété pour justifier des opérations de réécritures des expressions algébriques liées au développement de ces expressions. Ces verbalisations peuvent plus ou moins prendre appui sur la formule (donnée ou non), expliciter ou non d'autres propriétés des nombres ou des opérations (comme l'associativité, les priorités de calcul), évoquer ou non la structure de l'expression et sa "transformation". Sur ce dernier point, on note qu'un seul enseignant semble précisément s'y référer (celui dont les premières verbalisations se centraient sur la structure de l'expression). Mais il est tout aussi déstabilisé que ses collègues face à

une expression à trois facteurs apparents avec un pseudo-monôme dont la structure produit est rendue apparente.

Conclusion

Un premier résultat concerne la grande variété des discours des enseignants. Cela concerne autant la verbalisation du produit, que la verbalisation des opérations de réécritures d'expressions prenant appui sur la distributivité et que la verbalisation des amorces de la technique de développement. Dans cette variété, des éléments apparaissent en tension dans les discours : des verbalisations parfois descriptives de manipulation de signes versus des verbalisations qui visent à exposer la logique des actions, voire à les justifier... Des verbalisations qui parfois (re)prennent appui sur des aspects procéduraux des expressions liées aux produits initiaux parfois qualifiés de manière variée - suivant les choix de variables didactiques - ce qui peut poser la question de la cohérence des discours tenus d'une expression à l'autre, par un même enseignant. On peut d'ailleurs s'étonner que l'aspect structural d'une expression ne domine que dans le discours d'un seul enseignant. Nous nous interrogeons maintenant sur ce qui peut, dans des verbalisations associées à des tâches de calcul algébrique (produites par l'enseignant, voire à produire par les élèves ?), constituer des éléments de discours à même d'accompagner « au mieux » la pratique de calcul algébrique dans la classe de mathématiques. Autrement dit, il s'agit d'examiner en quoi et comment, la verbalisation pourrait devenir un levier dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul algébrique ...

Bibliographie

- Barthès-Garnier, C. (2020). *Calcul multiplicatif et propriété de distributivité au cycle 3 : où en sont les élèves avant leur entrée dans le formalisme de l'algèbre ?* Mémoire de deuxième année de Master Didactique des Mathématiques, Université de Paris.
- Chevallard, Y. (2020) *L'humble séminaire 2019-2020, séance 6*. Document en ligne
- Constantin, C. (2017). La distributivité : quelles connaissances pour enseigner la multiplication à l'école primaire ? *Grand N*, 100, 105-130.
- Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7).
- Drouhard, J.-P., & Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. Dans Coulange, L. & Drouhard, J.-P. (Eds.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Numéro spécial hors-série Revue Recherches en didactique des mathématiques*, La pensée sauvage, 209-235.
- Flückiger, A. (2000). Genèse expérimentale d'une notion mathématique : la notion de division comme modèle de connaissances numériques. Thèse de doctorat, Université de Genève.
- Grugeon-Allys, B., & Pilet, J. (2017). Quelles connaissances et quels raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre ? *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 20(3), 80-102.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.