

# Quelles mathématiques en physique ?

## Une approche praxéologique

**Résumé :** Cette communication présente l'analyse du savoir mathématique en jeu dans 1148 QCM de mathématiques pour la physique-chimie. En croisant la théorie anthropologique du didactique et le cycle de la modélisation, on a reconstruit une organisation de 50 complexes praxéologiques. Leur étude montre que les mathématiques pratiquées en classe de physique ne sont pas celles pratiquées en mathématiques : différences de notations, d'objets manipulés, de techniques utilisées et même de types de tâches pratiquées.

**Mots-clé :** mathématiques pour la physique ; complexe praxéologique ; modélisation ; exercices

### Introduction

La majorité des étudiant·es en première année de licence scientifique ne poursuivent pas leurs études dans cette filière car ils ne valident pas leur année (Lefebvre, 2013). Les difficultés des étudiant.es en sciences sont fortement corrélées à leurs difficultés en mathématiques (Meltzer, 2002; Sadler & Tai, 2001).

Par ailleurs, les travaux sur le transfert montrent que lorsque les étudiant.es maîtrisent un savoir-faire en mathématiques, ils et elles ont en général peu de difficulté à le transposer dans un contexte de physique. L'échec à utiliser un outil de mathématiques en contexte de physique est en général corrélé à la non maîtrise de ce savoir-faire dans le contexte de mathématiques (Bassok & Holyoak, 1989; Hoban et al., 2013; Potgieter et al., 2008).

Ce constat explique pourquoi de nombreuses universités et écoles post-bac françaises mettent en place des dispositifs de positionnement et/ou de remédiation en mathématiques (Tardy, 2020). En général, ces dispositifs portent sur les mathématiques telles qu'elles ont été enseignées dans le programme de mathématiques du lycée. Ces dispositifs reposent donc sur l'hypothèse que les mathématiques dont on a besoin en physique sont les mêmes que celles enseignées dans le cours de mathématiques du lycée. C'est dans ce contexte qu'ont démarrés les travaux du groupe Maths4Sciences.

### Le projet Maths4Sciences

Le projet Maths4Sciences a réuni une dizaine d'enseignant.es de mathématiques, de physique et de chimie - du secondaire et du supérieur - pour produire des ressources de remédiation en mathématiques pour les sciences. Ce projet a démarré en 2017 et s'est déroulé sur une durée de 4 ans grâce à différents financements (Unisciel, Institut Français de l'éducation, Région ARA) et le soutien de différents établissements (ENS de Lyon et Institut Villebon Charpack).

Les enseignant.es de ce projet se sont réuni.es environ une fois par mois sur toute la période pour analyser et produire des ressources numériques de remédiation. Ils et elles ont produit 1148 exercices de type question à choix multiple (QCM) ainsi que 57 fiches méthodes. Toutes ces ressources sont mutualisées via Unisciel.

Le projet était animé et coordonné par l'autrice de cette communication qui avait la casquette de chercheuse en didactique. Son rôle était - entre autres - d'éclairer les échanges avec de la bibliographie ainsi que d'orienter et de documenter le projet.

### La problématique

Au départ des travaux du groupe Maths4Sciences, les enseignant.es utilisaient les noms d'objets mathématiques comme « le logarithme », « les fractions » ou bien « le théorème de Pythagore » pour communiquer. Plusieurs incidents ont permis de déceler que ces objets recouvraient des implicites différents pour les enseignant.es de mathématiques et celles et ceux de sciences.

L'un des exemples les plus représentatifs a eu lieu lors de la première année du projet. Nous avons échangé lors de la séance sur les utilisations du logarithme dans les exercices de physique et de chimie. Il avait été alors décidé que l'un des enseignant de mathématiques produirait quelques QCM simples sur le sujet pour la séance suivante. Lorsque les enseignant.es de sciences ont découvert l'une des questions en séance (voir figure 1), leur réaction fut de penser qu'il y avait une erreur dans la question. En effet, en physique et en chimie, on utilise systématiquement le logarithme en base 10 (noté log) lorsque l'on manipule les puissances de 10. Dans la classe de physique-chimie, les élèves doivent savoir que  $\log(1000) = 3$ . Il a fallu que l'enseignant de mathématique explique que l'exercice portait sur une décomposition en nombres premiers, et que c'était usuel en classe de mathématique, pour que la situation se clarifie.

#### Quelle est l'expression simplifiée de $\ln(1000)$ ?

☐ 3

☐  $3 \ln(10)$

☒  $3 \ln(5) + 3 \ln(2)$

Figure1 : Exemple de question à choix multiple produite par un enseignant de mathématique sur le thème des logarithmes.

La répétition de ce type de situations nous a donc amenés à chercher une façon plus précise de décrire les mathématiques dont on a besoin en cours de physique ou de chimie. Nous avons donc posé la question de recherche suivante : « Quelles sont les mathématiques que l'on utilise en physique-chimie ? ».

Pour répondre à cette question il faut se doter d'outils pour décrire et catégoriser les mathématiques utilisées en physique-chimie.

### Les cadres théoriques

Nous avons eu recours à deux cadres théoriques : la théorie anthropologique du didactique avec en particulier la notion de complexe praxéologique et la modélisation en physique-chimie.

#### *La théorie anthropologique du didactique*

La théorie anthropologique du didactique a été développée dans le champ de la didactique des mathématiques par Yves Chevallard (Chevallard, 1991). L'une des idées fortes est que les savoirs sont des constructions humaines dans le but de *faire* quelque chose. Ainsi, le théorème de Pythagore permet par exemple de calculer des longueurs ou bien de construire un angle droit.

Dans le cadre de cette théorie, Chevallard propose de décrire les objets de savoir en utilisant la notion de complexe praxéologique. L'idée est de partir d'une tâche que l'élève (ou plus généralement une personne) réalise.

Illustrons cette idée sur un exemple : un exercice demande aux élèves de calculer la longueur manquante d'un triangle rectangle EFG de côtés de mesure 3 et 4. Cette tâche  $t$  appartient au type de tâche  $T$  : « trouver une longueur manquante dans un triangle rectangle ». Pour réaliser cette tâche, on va utiliser une technique  $\tau$  (« identifier l'hypoténuse, écrire l'égalité entre le carré de l'hypoténuse et la somme des carrés des deux autres côtés, isoler la grandeur recherchée et mener les calculs ») et une technologie  $\theta$  : le théorème de Pythagore. C'est le théorème de Pythagore qui justifie la technique utilisée. Le théorème de Pythagore peut lui même être justifié dans le cadre de la théorie  $\Theta$  : la géométrie euclidienne.

Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, nous venons de construire un complexe praxéologique constitué du quadruplet  $(T, \tau, \theta, \Theta)$ . Une même technologie peut être utilisée pour plusieurs types de tâches différentes. Ce concept assure le besoin que nous avons de décrire le fait que la propriété du logarithme  $\ln(ab^n) = \ln(a) + n\ln(b)$  peut être utilisée pour réaliser différents types de tâches.

La définition d'un type de tâche, d'une technique et d'une technologie conduit à ce que l'on rencontre souvent sous le nom de savoir-faire en pédagogie ou bien de capacité dans les programmes du lycée.

### *Le cadre de la modélisation en physique-chimie*

L'analyse des types de tâches mathématiques que l'on rencontre en cours de physique conduit à une sorte de liste à la Prévert de complexes praxéologiques. Nous avons eu besoin de les regrouper pour rendre intelligible et opératoire cette liste. Le modèle de la modélisation en physique tel que développé par Redish & Bing (2009) a permis de réaliser de manière opératoire l'agrégation des complexes praxéologiques.

Dans ce modèle, Redish et Bing décomposent la démarche de modélisation en physique en quatre grandes étapes : (1) la construction d'un modèle mathématisé de la situation physique étudiée, (2) la manipulation de ce modèle mathématisé pour obtenir une expression exploitable d'une grandeur d'intérêt, (3) l'exploitation de cette expression mathématiques, (4) et sa comparaison aux données expérimentales.

## **La méthodologie et les données utilisées**

### **La recherche basée sur la conception de ressources**

Cette recherche n'a pas été menée en partant d'une problématique obtenue de manière déductive au sein d'un cadre théorique mais à partir d'un travail de conception de ressources avec des enseignant.es. Cette approche garantit d'une part que la problématique soulevée part du terrain et d'autre part que la réponse apportée soit opératoire pour le groupe d'enseignant.es impliqué.es dans le projet. Dans le cadre d'une recherche basée sur la conception de ressources, l'objectif est aussi de construire une théorie « humble » (Cobb et al., 2003). Ici l'enjeu était de théoriser les différences entre les mathématiques du cours de mathématiques et celles utilisées dans le cours de physique.

## **La méthodologie des théories ancrées**

L'analyse des données récoltées s'est faite selon la méthodologie des théories ancrées développée par Strauss & Corbin (1998). Il s'agit d'une approche de recherche qualitative inductive basée sur la comparaison systématique d'un corpus de données. Il est possible de partir de catégories existantes, mais l'idée est de produire de nouvelles catégories en explicitant les critères de catégorisation en même temps que l'on catégorise et que l'on acquière de nouvelles données.

## **Les données**

Les données utilisées pour construire la liste des complexes praxéologiques et leur organisation dans le cadre de la modélisation sont les 1148 exercices de type question à choix multiples rédigés pendant le projet.

Ces exercices sont constitués d'une consigne, de plusieurs propositions, d'une explication générale et d'explications spécifiques. Environ un tiers de ces exercices ont été rédigés par des enseignant.es de mathématiques du secondaire dans un contexte de mathématiques. Le reste des exercices a été rédigé par des enseignant.es de physique ou de chimie (secondaire ou supérieur) dans un contexte de sciences.

L'ensemble des exercices porte sur des outils mathématiques qui sont vus dans l'une des filières du secondaire (collège ou lycée) et qui sont utilisés dans les cours de physique-chimie du lycée ou de physique de l'enseignement supérieur. Ces exercices ont été conçus après que les enseignant.es avaient analysé des exercices de physique ou de chimie qu'ils utilisaient en classe. Le fait que ce travail a été réalisé avec une dizaine d'enseignant.es sur une période de 4 ans garantit globalement la couverture des besoins.

Ces exercices sont rédigés avec la chaîne éditoriale scenari qui possède certaines propriétés des bases de données. Il a ainsi été possible d'utiliser des métadonnées directement dans l'outil auteur pour catégoriser ces exercices et les retrouver automatiquement ensuite.

## **Résultats**

### **Une liste de complexes praxéologiques identifiés et regroupés en 4 catégories**

L'utilisation de ces deux cadres théoriques (la praxéologie et la modélisation) nous a permis d'identifier 50 complexes praxéologiques différents définis à chaque fois par le type de tâche et la technologie visés. Les types de tâches ont ensuite été agrégés selon l'étape du modèle de la modélisation pour laquelle le type de tâche est utilisé : modéliser une situation, manipuler une expression littérale, faire parler une expression littérale, analyser des données. Nous n'avons pas été rechercher la théorie qui serait à mobiliser pour justifier l'utilisation de la technologie dans une technique donnée. En effet, les enseignant.es du projet considéraient que ces justifications n'étaient pas nécessaires pour assurer la réussite des étudiant.es.

Cette catégorisation des types de tâches identifiées dans les exercices de physique et de chimie permet de voir qu'une même technologie peut être utilisée dans des techniques différentes pour des types de tâches différents. C'est le cas par exemple de la dérivée que nous illustrons dans le tableau ci-dessous. L'identification des techniques associées nous a permis de construire des fiches méthodes pour la remédiation.

| Domaine<br>(modélisation)          | Type de tâche                                                                                                                          | Technique<br>(en classe de physique ou de chimie)                                                                                                                                                                                                                    | Technologie |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|
| <b>Modéliser</b>                   | <b>Traduire un énoncé</b> définissant une grandeur par le taux de variation d'une autre grandeur *                                     | 1. Identifier la grandeur qui varie (rôle de f en maths) et la grandeur qui la fait varier (rôle de x en maths)<br>2. Écrire la relation en utilisant la notation physique de la dérivée                                                                             | Dérivée     |
| <b>Manipuler</b>                   | <b>Trouver l'expression d'une grandeur</b> définie par une dérivée à partir de son expression littérale                                | 1. Identifier la grandeur qui joue le rôle de variable<br>2. Reconnaître une structure dans l'expression de la grandeur<br>3. Appliquer les règles de calcul des dérivées                                                                                            | Dérivée     |
| <b>Faire parler une expression</b> | <b>Étudier les variations d'une grandeur</b> et en particulier la présence ou non d'un extremum à partir de son expression littérale   | 1. Identifier la grandeur qui joue le rôle de variables<br>2. Reconnaître une structure dans l'expression de la grandeur<br>3. Appliquer les règles de calcul des dérivées<br>4. Chercher la valeur de la variable qui rend la dérivée nulle                         | Dérivée     |
| <b>Analyser des données</b>        | <b>Lire un graphe</b> en interprétant sa pente pour trouver par exemple la valeur de la variable qui rend maximal le taux de variation | 1. Traduire la question en une condition sur la pente de la tangente (positive, négative, nulle, ...)<br>2. Représenter différentes tangentes et chercher progressivement le point qui vérifie la condition recherchée<br>3. Lire l'abscisse de ce point et conclure | Dérivée     |

Tableau 1 : Illustration de différents complexes praxéologiques associés à la technologie « dérivée ». \* La première ligne correspond à un complexe praxéologique dont nous avons postulé l'existence mais qui n'a pas été observé dans les exercices étudiés.

En regroupant ensemble les types de tâche qui permettent de réaliser une action « similaire », nous pouvons présenter une version condensée de ce référentiel organisée autour de la modélisation comme illustré dans la figure 2.

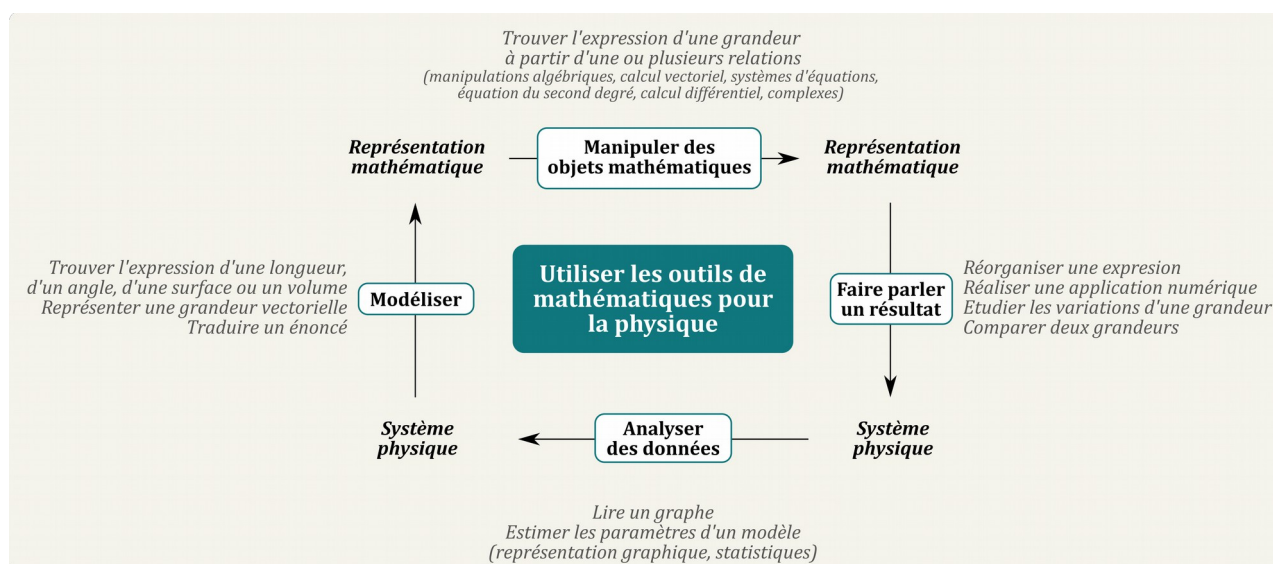


Figure 2 : Organisation des types de tâches autour du cycle de la modélisation.

## Deux mathématiques

Ce travail nous a confirmé que les mathématiques utilisées en cours de physique-chimie ou de physique différaient de celles utilisées en cours de mathématiques. Nous avons listé 4 grandes différences qui ne sont évidemment pas toutes présentes pour chacun des objets mathématiques.

### 1. Des notations différentes

La différence dans les notations est celle qui apparaît le plus nettement et qui est souvent invoquée pour expliquer les difficultés de transfert pour les élèves et les étudiant.es.

Les notations et le vocabulaire utilisés pour décrire les vecteurs en sont un exemple frappant. En classe de mathématiques, le vecteur est défini par ses coordonnées qui sont définies par analogie avec celles du point dans un plan. En physique on parle historiquement de composantes. L'idée étant de décomposer un vecteur (au départ une force ou une vitesse) dans une base bien choisie. La majorité des vecteurs en physique ne représentent pas des déplacements et ne se représentent donc pas dans le plan (ou l'espace) utilisé en géométrie.

| En contexte de mathématiques          | En contexte de physique                   |
|---------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\vec{V} = X_v \vec{i} + Y_v \vec{j}$ | $\vec{V} = V_x \vec{u}_x + V_y \vec{u}_y$ |
| Coordonnées d'un vecteur              | Composantes d'un vecteur                  |

Tableau 3 : Différences de notations illustrées sur le cas des vecteurs

### 2. Des objets différents

Certains quiproquo entre enseignant.es de sciences et enseignant.es de mathématiques tient au fait qu'ils et elles manipulent des objets de nature différente. Cette différence est bien connue dans la littérature avec le schibboleth de (Dray & Manogue, 1999) .

On décrit la température d'une plaque métallique chauffée en son centre par  $T(x, y) = k(x^2 + y^2)$  . On souhaite écrire T en fonction de  $r$  et  $\theta$  . Qu'écrivez vous ?

■  $T(r, \theta) = k(r^2 + \theta^2)$

■  $T(r, \theta) = kr^2$

Les mathématicien·nes manipulent des fonctions qui dépendent de variables muettes. Si l'on change la dépendance fonctionnelle, alors on change de fonction, et donc de nom pour la fonction. Les physicien·nes manipulent des grandeurs qu'ils et elles décrivent avec des relations fonctionnelles. Les lettres ont un sens et il s'agit ici de passer d'une description en coordonnées cartésiennes à une description en coordonnées polaires.

Le fait que les lettres utilisées en physique et en chimie aient un sens et amènent avec elles des propriétés non explicités (r est défini positif par exemple) constitue une grande différence avec l'usage en mathématiques.

### 3 – Des technologies qui ne sont pas utilisées de la même manière

L'une des forces de l'approche de Chevallard est de permettre de rendre compte du fait qu'une même technologie peut être utilisée dans différentes techniques.

Un exemple qui a surpris le groupe est celui de la technique à utiliser pour déterminer un extremum local dans les variations d'une grandeur. Ce type de tâche se retrouve en classe de mathématiques et

en classe de physique-chimie associée à la même technologie : la dérivée. On voit dans cet exemple illustré à la figure 3 que la technique utilisée en mathématiques n'est pas celle utilisée en physique. La différence s'explique par le fait que le contrat didactique en physique sous-entend qu'on ne demandera pas de chercher un extremum local s'il n'y a qu'un point d'inflexion.

| Technique en mathématiques                                                                                                                                                                                                                                                           | Technique en physique-chimie                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Reconnaître une structure dans l'expression de la grandeur (forme fractionnaire, produit de fonctions, ...)<br>2. Appliquer les règles de calcul des dérivées<br>3. Chercher la valeur de la variable pour laquelle $f'$ change de signe (dérivée seconde, tableau de variations) | 1. Identifier la grandeur qui joue le rôle de variable<br>2. Reconnaître une structure dans l'expression de la grandeur (forme fractionnaire, produit de fonctions, ...)<br>3. Appliquer les règles de calcul des dérivées<br>4. Chercher la valeur de la variable qui rend la dérivée nulle |

Figure 3 : Exemple des différences entre les techniques utilisées pour un même type de tâche en mathématiques et en physique-chimie

#### 4 – Des technologies qui ne sont pas utilisées pour faire la même chose

Dans l'exemple précédent, la dérivée est utilisé pour un même type de tâche en physique ou en mathématiques. Cependant, l'exemple du logarithme donné en introduction montre bien que parfois une technologie n'est pas utilisé pour les mêmes types de tâche en mathématiques et en sciences.

Nous avons déjà parlé du logarithme en début de communication. En mathématiques les tâches à réalisées sont souvent associées à de la décomposition de nombres premiers et non pas à isoler une grandeur en utilisant les fonctions réciproques.

Nous retrouvons aussi des différences avec les vecteurs. Comme nous l'avons déjà évoqué, en mathématiques le registre graphique est en général associé uniquement à la représentation de déplacements dans le cadre de la géométrie. En physique, les vecteurs représentés sont majoritairement des grandeurs qui ne sont pas homogènes à une distance.

## Conclusion et discussion

La principale conclusion de ce travail est que les mathématiques que l'on fait en physique ne sont pas « simplement » les mathématiques du cours de mathématiques avec des notations différentes. Les différences sont plus profondes et le cadre théorique de la théorie anthropologique du didactique permet de décrire ces différences de manière opérationnelle. Nous défendons ici l'idée que ces différences de notation sont une trace sémiotique de la différence des usages des outils entre nos deux mathématiques. Le cadre de la modélisation en physique-chimie permet d'organiser le savoir mathématique autour de grandes familles de type de tâches, et non dans une approche « encyclopédique » qui partirait du pôle « logos » du savoir. Le cadre de la modélisation couplé à celui de la TAD permet de s'inscrire dans une approche compétences.

Ce travail nous a aussi convaincu.es de l'importance de travailler dans un groupe pluridisciplinaire sur des vrais exercices afin de rendre visible les différences entre les cultures : mathématiques versus physique chimie, physique chimie du lycée versus physique du supérieur.

Enfin, ces travaux conduisent à faire l'hypothèse que la manière la plus efficace de faire de la remédiation pour les étudiant.es en physique n'est peut-être pas de leur faire réviser le programme, ou des extraits du programme de mathématiques du lycée. Il y aurait probablement un intérêt à construire un enseignement des techniques effectivement utilisées en physique. La question de la justification de ces techniques n'a pas été abordée de manière systématique dans notre groupe, mais c'est aussi une des ouvertures de ce travail.

## Bibliographie

- Bassok, M., & Holyoak, K. J. (1989). Interdomain Transfer Between Isomorphic Topics in Algebra and Physics. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory and Cognition*, 14.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique—Du savoir savant au savoir enseigné* (2ème édition). La pensée sauvage.
- Dray, T., & Manogue, C. A. (1999). THE VECTOR CALCULUS GAP : MATHEMATICS ≠ PHYSICS. *PRIMUS*, 9(1), 21-28. <https://doi.org/10.1080/10511979908965913>
- Hoban, R. A., Finlayson, O. E., & Nolan, B. C. (2013). Transfer in chemistry : A study of students' abilities in transferring mathematical knowledge to chemistry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(1), 14-35. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2012.690895>
- Lefebvre, O. (2013). *Réussite et échec en premier cycle* (Note d'information 13-10). Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche. <https://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/fr/reussite-et-echec-en-premier-cycle-47746>
- Meltzer, D. E. (2002). The relationship between mathematics preparation and conceptual learning gains in physics : A possible "hidden variable" in diagnostic pretest scores. *American Journal of Physics*, 70(12), 1259-1268. <https://doi.org/10.1119/1.1514215>
- Potgieter, M., Harding, A., & Engelbrecht, J. (2008). Transfer of algebraic and graphical thinking between mathematics and chemistry. *Journal of Research in Science Teaching*, 45(2), 197-218. <https://doi.org/10.1002/tea.20208>
- Redish, E. F., & Bing, T. J. (2009). Using Math in Physics : Warrants and Epistemological Frames. *Physics community and cooperation*, 2.
- Sadler, P. M., & Tai, R. H. (2001). Success in introductory college physics : The role of high school preparation. *Science Education*, 85(2), 111-136. [https://doi.org/10.1002/1098-237X\(200103\)85:2<111::AID-SCE20>3.0.CO;2-O](https://doi.org/10.1002/1098-237X(200103)85:2<111::AID-SCE20>3.0.CO;2-O)
- Strauss, A., & Corbin, J. M. (1998). *Basics of Qualitative Research : Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. SAGE Publications.
- Tardy, J. (2020, juillet 23). Unisciel se mobilise pour la rentrée 2020 -n°109. *Unisciel*. <http://www.unisciel.fr/2020/07/23/rentree2020/>